

Cauchy-Lipschitz Local

Théorème: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f \in C^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^m)$ et $z_0, (t_0, x_0) \in I \times \Omega$.

Alors le problème de Cauchy (C): $(x' = f(t, x), x(t_0) = x_0)$ admet une unique solution locale

① Construction de $\mathcal{C}$, ② Construction de $\Phi(x): t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$, ③ Point fixe pour Φ .

① Par hypothèse, $\exists T_0, R > 0$ tel que $U := \bar{B}(t_0, T_0) \times \bar{B}(x_0, R) \subset I \times \Omega$ et $f|_U$ soit L-lipschitzienne en sa 2^{ème} variable. Par théorème des bornes atteintes, $M := \sup_{(s,y) \in U} \|f(s,y)\| < +\infty$ bien défini.

On pose $T > 0$ tel que $T \leq T_0$, $T \leq \frac{R}{M}$ et $T < \frac{1}{L}$. Alors $\mathcal{C} := \bar{B}(t_0, T) \times \bar{B}(x_0, R) \subset U$ est un cylindre de sécurité car $\forall x \in C^0(\bar{B}(t_0, T))$ solution de (C), on a $\forall t \in \bar{B}(t_0, T)$ on a

$$\|x(t) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s))\| ds \leq (t - t_0) M \leq TM \leq R \text{ donc } x(t) \in \bar{B}(x_0, R)$$

② On pose $E = C^0(\bar{B}(t_0, T), \bar{B}(x_0, R))$ et $\forall x \in E$, $\Phi(x): t \in \bar{B}(t_0, T) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$. D'après ①, on a $\Phi(x) \in E$, donc $\Phi: E \rightarrow E$ est bien défini.

③ Puisque $\bar{B}(x_0, R)$ complet car fermé de $\mathbb{R}^m$, on a E complet pour $\|\cdot\|_\infty$. De plus, $\forall x, y \in E$, $\forall t \in \bar{B}(t_0, T)$

$$\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \leq \int_{t_0}^t L \|x(s) - y(s)\| ds \leq (t - t_0) L \|x - y\|_\infty \leq TL \|x - y\|_\infty$$

Donc $\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_\infty \leq TL \|x - y\|_\infty$ avec $TL < 1$. On en déduit que Φ est contractante.

D'après le théorème du point fixe, $\exists ! x \in E$ tel que $x = \Phi(x)$. C'est-à-dire, $\forall t \in \bar{B}(t_0, T)$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \text{ d'où } x \text{ unique solution locale de (C).}$$

Corollaire: Si $x_1: J_1 \rightarrow \Omega$, $x_2: J_2 \rightarrow \Omega$ sont solutions de (C), alors $x_1 = x_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

Soit $X = \{t \in J_1 \cap J_2 \mid x_1(t) = x_2(t)\}$, où $J_1 \cap J_2$ convexe car intersection de convexes.

$\neq \emptyset$ * On a $t_0 \in J_1 \cap J_2$ et $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$. D'où $t_0 \in X$ et $X \neq \emptyset$.

fermé * On a $X = (x_1 - x_2|_{J_1 \cap J_2})^{-1}(\{0\})$ fermé car $x_1 - x_2$ continue.

ouvert * Soit $s_0 \in X$, $y_0 := x_1(s_0) = x_2(s_0)$. D'après le théorème, le problème de Cauchy (C): $(x' = f(t, x), x(s_0) = y_0)$

admet une unique solution définie sur $\bar{B}(s_0, T)$, pour un $T > 0$. Alors $x_1 = x_2$ sur $\bar{B}(s_0, T)$, on a

$\bar{B}(s_0, T) \subset X$ et X ouvert. Par connexité de $J_1 \cap J_2$, on a $X = J_1 \cap J_2$, i.e. $x_1 = x_2$ sur $J_1 \cap J_2$.

Définition: Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On dit que $f \in L^2$ si $\forall (t, x) \in I \times \Omega$, $\exists \mathcal{V} \subset I \times \Omega$ voisinage de (t, x) , $\exists L > 0$ tels que $\forall (s, y_1), (s, y_2) \in \mathcal{V}$, $\|f(s, y_1) - f(s, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|$

Définition: Soit $(C): (\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0)$. On dit que $\mathcal{C} = \bar{B}(t_0, T) \times \bar{B}(x_0, R)$ cylindre de récurrence de (C) si $\forall x \in C^1(\bar{B}(t_0, T), \mathbb{R}^n)$ solution de (C) , on a $x: \bar{B}(t_0, T) \rightarrow \bar{B}(x_0, R)$

Lemme: Si $f \in C^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$, $J \subset I$ ouvert, alors on a

$x: J \rightarrow \Omega$ solution de $(C) \Leftrightarrow x \in C^0(J, \Omega)$, $\forall t \in J$ $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$.

($\Rightarrow$) Si x solution, $\dot{x} = f(t, x)$ est continue donc x est C^1 et par le TFA, on a

$$\forall t \in J, x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

($\Leftarrow$) Si $x \in C^0(J, \Omega)$, par compo $s \mapsto f(s, x(s))$ continue. Par le TFA, $t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$ est dérivable de dérivée $t \mapsto f(t, x(t))$, ie $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \forall t \in J$ Avec $x(t_0) = x_0$.

Théorème: Avec les mêmes hypothèses, (C) admet une unique solution maximale

Soit $\tilde{J} = \{J \subset I \text{ intervalle ouvert non vide} \mid \exists x_J: J \rightarrow \Omega \text{ solution de } (C)\}$ et $\tilde{J} = \bigcup_{J \in \tilde{J}} J$.

On pose $\forall t \in \tilde{J}$, $\tilde{x}(t) := x_J(t)$ où $t \in J \subset \tilde{J}$ et $x_J: J \rightarrow \Omega$ solution de (C) . D'après la corollaire, $x_J(t)$ ne dépend pas de J ni de x_J , donc $\tilde{x}: \tilde{J} \rightarrow \Omega$ bien définie.

Si $\exists (\tilde{x}, \tilde{J})$ solution de (C) qui prolonge $\tilde{x}$, on a $\tilde{J} \subset \tilde{J}$. Par définition, $\tilde{J} \in \tilde{J}$ donc $\tilde{J} \subset \tilde{J}$ et $\tilde{J} = \tilde{J}$. Donc $\tilde{x}$ est maximale, et unique car $\tilde{x} = \tilde{x}$ sur $\tilde{J} = \tilde{J} \cap \tilde{J}$ d'après la corollaire.